Szakdolgozat

Asztrofizikai információk kinyerése gravitációshullám-kitörések megfigyeléséből

Bécsy Bence

Fizika alapképzés

III. évfolyam

Témavezető:

Raffai Péter PhD

egyetemi adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2016

Tartalomjegyzék

Kivonat **III**

1. Bevezetés **1**

1.1. A gravitációs hullámok elmélete 1

1.2. A gravitációs hullámok megfigyelése 5

2. Módszerek **10**

2.1. Bayes-statisztika 10

2.2. A BayesWave algoritmus 11

2.3. Gravitációs hullámok paraméterbecslése 14

2.4. Paraméterbecslés vizsgálata beinjektált jelekkel 15

2.5. Szimulált zajminták és jelek 15

3. Eredmények **20**

3.1. Égi pozíció rekonstrukció 20

3.2. Hullámforma rekonstrukció 23

3.3. A gravitációshullám-jel paramétereinek becslése 26

4. Konklúzió **30**

Köszönetnyilvánítás **31**

Hivatkozások **32**

Nyilatkozat

Kivonat

Az Amerikai Egyesült Államokban működő Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) detektorok 2015. szeptember 14-én először észlelték egy feketelyuk-kettős összeolvadásakor kibocsájtott gravitációs hullámokat. Ez a gravitációs hullámok első közvetlen megfigyelése. Várhatóan a következő években a LIGO detektorok további jeleket észlelnek majd, mind további feketelyuk-kettősökből, mind más asztrofizikai forrásokból. Mivel a gravitációs hullámok az elektromágneses hullámoktól teljesen független információhordozók, így az asztrofizikusok egy új eszközhöz jutottak, amellyel vizsgálhatjuk a Világegyetemet.

A jövőben észlelhető jelek egyik nagy csoportja az úgynevezett gravitációshullám-kitörések. Ez a csoport magába foglal minden olyan tranziens jelet, amelynek hullámformája asztrofizikai modellekből nem, vagy csak részben ismert. A gravitációshullám-kitörések várható forrásai közé tartoznak a szupernóva-robbanások, a gamma-felvillanások, az elnyúlt pályán keringő feketelyuk-kettősök, a neutroncsillagok rengései, de olyan források is, amelyeket ma még nem ismerünk.

Célom annak vizsgálata, hogy gravitációshullám-kitörések jövőbeli megfigyelésekor hogyan, és milyen pontossággal lehet majd a gravitációshullám-jelek modellfüggetlen, és a források modellfüggő paramétereit meghatározni. Ennek érdekében a LIGO Tudományos Kollaboráció (LIGO Scientific Collaboration) egy kitörésekre specializált adatfeldolgozó algoritmusának rekonstrukciós pontosságát vizsgálom mesterséges zajmintákhoz hozzáadott szimulált jelekkel. A pontosság ismerete a jövőben lehetővé teszi majd a forrásmodellek azon legbővebb körének beazonosítását, amelyekbe tartozó modellek az elérhető rekonstrukciós pontossággal tesztelhetők.

1. Bevezetés

„Ezzel a felfedezéssel, mi, emberek, csodálatos, új kalandba vágunk bele: kalandba, amiben feltárjuk a világegyetem görbült oldalát - objektumokat és jelenségeket, amik görbült téridőből születnek. Az ütköző fekete lyukak és a gravitációs hullámok az első gyönyörű példáink erre." - Kip Thorne reakciója a gravitációs hullámok első közvetlen észlelésére [1]

A LIGO Tudományos Kollaboráció 2016. február 11-én jelentette be, hogy megtörtént a gravitációs hullámok első közvetlen megfigyelése. Ez a felfedezés újabb megerősítést adott az általános relativitáselméletnek és demonstrálta a gravitációs hullámok megfigyelésének kivitelezhetőségét. Ezen túl pedig a csillagászat új korszakának kezdetét fémjelzi, a gravitációshullám-csillagászatét, ugyanis a gravitációs hullámok az elektromágneses sugárzástól teljesen független információhordozóként egy új eszközt jelentenek a csillagászoknak a Világegyetem megismerésére.

Ebben a fejezetben röviden összefoglalom a gravitációs hullámok elméletét, a megfigyelésükre szolgáló műszerek működését, és az első közvetlen megfigyelésüket.

1.1. A gravitációs hullámok elmélete

Albert Einstein 1915-ben publikálta az általános relativitáselméletet, amely a gravitáció új matematikai leírását adta [1]. Az azóta eltelt egy évszázad alatt bebizonyosodott, hogy a gravitáció Newton-féle leírása csak bizonyos esetekben pontos, míg az einsteini leírás eddig minden kísérletben helyes eredményt adott [2]. Az általános relativitáselméletnek azon túl, hogy a gravitáció pontosabb leírását adja, több minőségi következménye is van. Ilyen a fekete lyukak létezésének lehetősége, a gravitációs lencsézés, a kozmológiai állandó és a gravitációs hullámok. Ebben a fejezetben a gravitációs hullámok elméletét fogom röviden bemutatni.

Az alábbi általános relativitáselméleti tárgyalásban a tenzorok indexelésének azt a konvencióját követem, miszerint görög betűkkel indexelem a négyesvektorok komponenseit (pl. v_α) és latin betűkkel a hármasvektorok komponenseit (pl. p^i). Így a görög betűs indexek négy értéket vehetnek fel, azaz $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$, a latin betűs indexek pedig hármat, azaz $k \in \{1, 2, 3\}$. Ezenkívül az Einstein-féle néma index konvenciót is alkalmazom, miszerint különböző pozícióban lévő (fent vagy lent)

[1] Részlet a felfedezés kapcsán megjelent sajtóközleményből. Magyarra fordította: Raffai Péter.

azonos indexekre összegzés van, amit külön nem jelölök. Például a $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ kifejezés alatt azt értem, hogy $\sum_{\nu=0}^{3}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$.

Az alábbiakban a gravitációs hullámok [3]-ban megtalálható leírását fogom röviden áttekinteni. Az általános relativitáselmélet egyik alapegyenlete az Einstein-egyenlet, amely leírja, hogy az anyag hogyan görbíti a téridőt:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

ahol $G_{\alpha\beta}$ az Einstein-tenzor, G a gravitációs állandó, c a fénysebesség, $T_{\alpha\beta}$ pedig az energia-impulzus tenzor. Az Einstein-tenzor az alábbi módon számolható:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \tag{2}$$

ahol $R_{\alpha\beta}$ a Ricci-tenzor, R a Ricci-skalár, $g_{\alpha\beta}$ pedig a metrikus tenzor.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a téridő „majdnem” sík, azaz a metrikus tenzor felírható az alábbi módon:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

ahol $\eta_{\alpha\beta}$ a sík téridő metrikus tenzora, $h_{\alpha\beta}$ pedig egy kis perturbáció.

Ebben a közelítésben az Einstein-egyenlet lényegesen leegyszerűsödik. Érdemes még bevezetni egy módosított perturbációt, melynek nyoma ellentettje $h_{\alpha\beta}$ nyomának:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \tag{4}$$

ahol h a $h_{\alpha\beta}$ tenzor nyoma.

Ha ekkor egy mértéktranszformációval áttérünk a Lorenz mértékre, ahol $\partial\bar{h}^{\mu\alpha}/\partial x^{\mu} = 0$, akkor az Einstein egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$-\Box\bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

ahol $\Box$ a d'Alembert-operátor.

Tehát az Einstein-egyenlet gyenge tér közelítésben egy hullámegyenlet $\bar{h}_{\alpha\beta}$-ra, aminek forrástagja az energia-impulzus tenzor.

Tekintsük most az Einstein-egyenlet vákuumban érvényes alakját, azaz amikor $T_{\alpha\beta} = 0$. Ekkor egy forrásmentes hullámegyenletet kapunk:

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = 0. \tag{6}$$

Ennek az egyenletnek megoldásai a síkhullámok. Tekintsük a z irányba terjedő síkhullámokat, azaz bármilyen csak $(t - z/c)$-től függő függvényt. A Lorenz mértékfeltétel miatt ekkor $\partial \bar{h}^{0\alpha}/\partial t = 0$ és $\partial \bar{h}^{3\alpha}/\partial z = 0$, azaz $\bar{h}_{0\alpha}(t - z/c)$ és $\bar{h}_{3\alpha}(t - z/c)$ állandó, és ezt az állandót választhatjuk nullának, így $\bar{h}_{0\alpha} = 0$ és $\bar{h}_{3\alpha} = 0$. És mivel $\bar{h}_{\alpha\beta}$ szimmetrikus, így az egyedüli nem eltűnő tagok $\bar{h}_{11}$, $\bar{h}_{22}$ és $\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21}$ lehetnek.

A módosított perturbációkat visszaírhatjuk a tényleges perturbációkra az alábbi képlettel: $h_{\alpha\beta} := \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}$. Így a nem eltűnő tagok:

$$h_{00} = -c^2 h_{33} = \frac{1}{2}c^2(\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22}) \tag{7}$$

$$h_{11} = -h_{22} = \frac{1}{2}(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}) \tag{8}$$

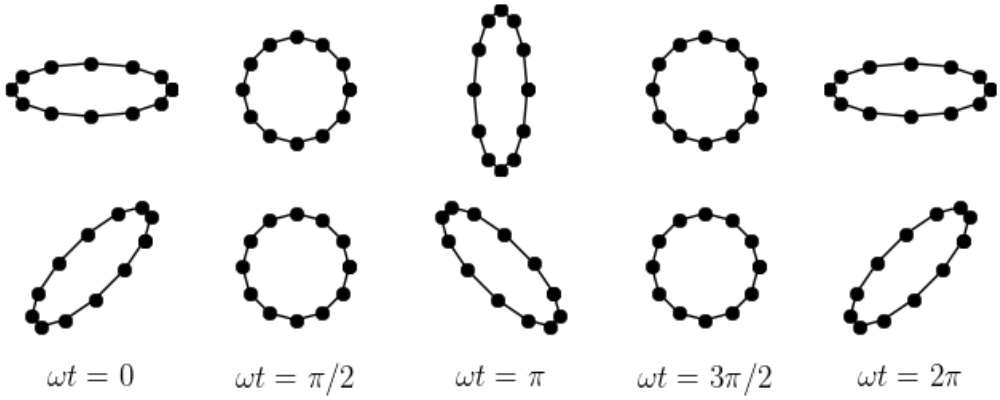
$$h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12} \tag{9}$$

Belátható, hogy további transzformációs lépésekkel a nem eltűnő komponensek száma tovább csökkenthető. Végül h-nak két független komponense lesz:

$$h_+ = h_{11} = -h_{22}, \tag{10}$$

$$h_\times = h_{12} = h_{21}. \tag{11}$$

Nézzük most meg azt, hogy milyen hatása van egy gravitációs hullámnak. Vegyünk egy tömegpontokból álló gyűrűt, aminek síkjára merőlegesen halad egy gravitációs hullám. Ekkor a gyűrű az 1. ábra szerint periodikusan hol az egyik, hol az elsőre merőleges irányban nyúlik meg. Az ábra két sora a gravitációs hullám két lehetséges polarizációjának hatását mutatja. A felső sorban a $+$, az alsóban pedig az $\times$ polarizáció hatása látható. Ezek megfelelnek a korábban látott h_+ és $h_\times$ amplitúdóknak.



1. ábra. Egy szabadon mozgó tömegpontokból álló gyűrű eltorzulása egy annak síkjára merőlegesen áthaladó gravitációs hullám hatására. A felső sorban a + polarizációjú, az alsóban az × polarizációjú gravitációs hullám hatása látható. Az idő a vízszintes irányban telik, balról jobbra. Forrás: www.2physics.com

Vizsgáljuk most meg azt, hogy hogyan keletkeznek a gravitációs hullámok. Ehhez tekintsük az Einstein egyenlet alábbi alakját:

$$\Box \bar{h}^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \tag{12}$$

Ekkor a Lorenz mértékből az alábbi feltétel következik:

$$\frac{\partial T^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{13}$$

A (12) egyenlet megoldását Green függvénnyel adhatjuk meg. A d'Alembert-operátor retardált Green-függvénye:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\Theta(t)\delta(t - |\mathbf{x}|/c), \tag{14}$$

ahol Θ a Heaviside-függvény, δ pedig a Dirac-delta disztribúció, $\mathbf{x}$ a helyvektor.

A forrástagot a Green-függvénnyel kiintegrálva a teljes térre kapjuk a hullámegyenlet megoldását:

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t - r/c)}{r} \mathrm{d}^3\mathbf{x}', \tag{15}$$

ahol $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Mivel minket a forrástól távol, az úgynevezett sugárzási zónában érdekel a

megoldás, ezért közelítéssel élhetünk. Feltehetjük, hogy r értéke minden a forráson belüli $\mathbf{x}'$ értékre állandó, hiszen a forrás mérete sokkal kisebb, mint a megfigyelőtől vett távolsága. Ekkor a nevezőben lévő r-t kihozhatjuk az integrálás elé, azaz a megoldás az alábbi alakú lesz:

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = \frac{4G}{c^4 r}\int T^{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t - r/c)\mathrm{d}^3\mathbf{x}' \tag{16}$$

Ennek csak térbeli komponensekre vonatkozó változata az alábbi alakban írható:

$$\bar{h}^{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{2G}{c^4 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int x'^i x'^j T^{00}(\mathbf{x}', t - r/c)\mathrm{d}^3\mathbf{x}' \tag{17}$$

Vezessük be a kvadrupólmomentum-tenzort:

$$I^{ij}(t) = \int x^i x^j T^{00}(t - r/c, \mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathbf{x}. \tag{18}$$

Így a megoldás az alábbi alakú lesz:

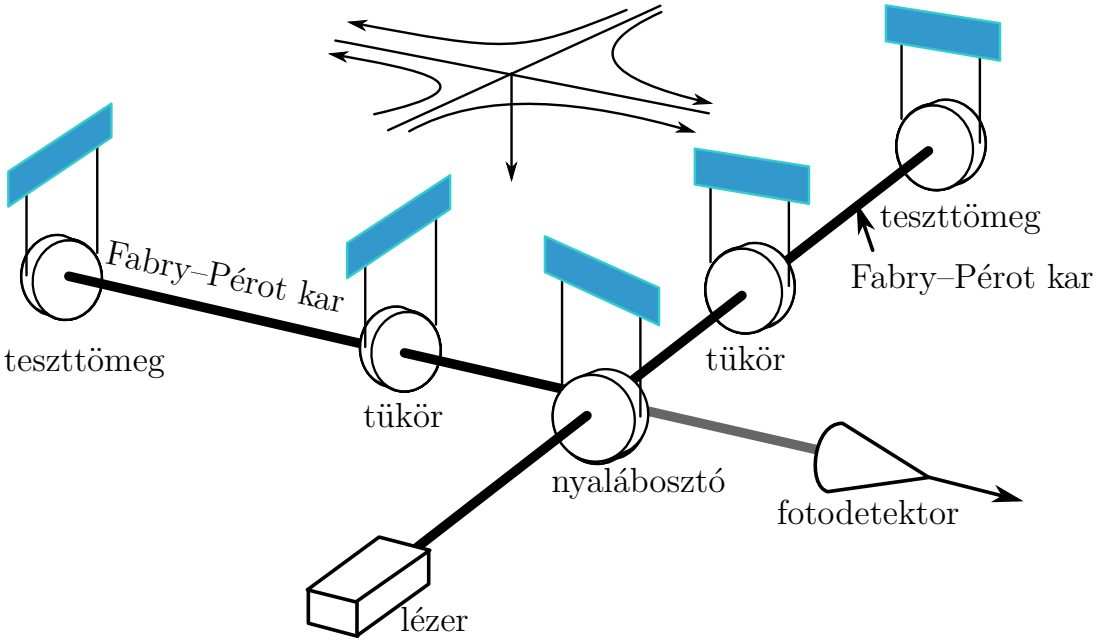
$$\bar{h}^{ij}(x,t) = \frac{2G}{c^4 r}\ddot{I}^{ij}(t - r/c). \tag{19}$$

Tehát a gravitációshullám-amplitúdó arányos a kvadrupólmomentum-tenzor idő szerinti második deriváltjával a kisugárzás idejében. Vegyük észre azt is, hogy az amplitúdó a forrás távolságával fordítottan arányos.

1.2. A gravitációs hullámok megfigyelése

A lézeinterferometrikus gravitációshullám-detektorok működésének alapelve a 2. ábrán látható. A lézerből infravörös lézernyaláb indul ki, ami egy nyalábosztóra esik. A nyalábosztó egy, a lézersugár irányával 45°-os szöget bezáró féligáteresztő tükör. Így a lézernyaláb ketté oszlik, és a fény egyik fele továbbhalad egyenesen, másik fele pedig merőlegesen eltérül. Ezután a két irányba eltérült nyalábok bekerülnek egy-egy ún. Fabry–Pérot karba. Ez két részlegesen áteresztő tükörből áll, amelyek belső oldala nagyon jó visszaverő, külső oldaluk pedig jó áteresztő, így ha egy foton bekerül a karba, akkor többször oda-vissza pattog a két tükör között, mielőtt visszatérne a nyalábosztó felé. Itt aztán a két irányból érkező fény újra egyesül, és a fotodetektor ezek interferenciaképét rögzíti. Ha a két kar hossza azonos, akkor a két irányból érkező fény teljesen kioltja egymást. Ha a detektoron áthalad egy gravitációs hullám,

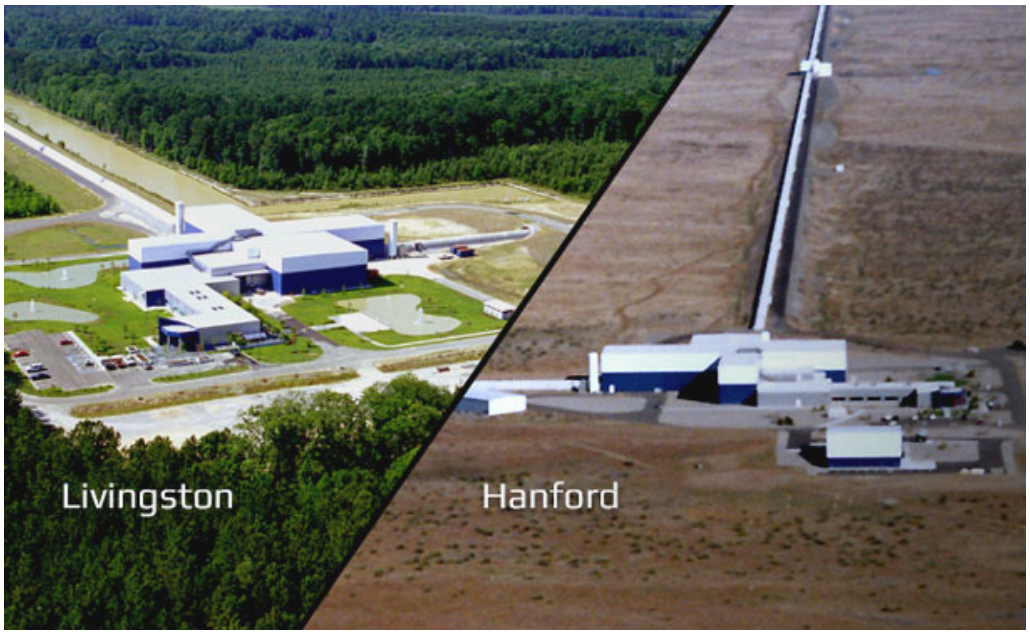
az az egyik irányban „összenyomja”, a másik irányban pedig „széthúzza” a téridőt, ezzel az egyik kar rövidülését és a másik megnyúlását okozva. Emiatt az egyik nyaláb kicsit késve érkezik a másikhoz képest, és már nem lesz teljes kioltás. Ilyen módon a fotodetektor által érzékelt fénymennyiségből tudunk következtetni a karok hosszának megváltozására, és így egy áthaladó gravitációs hullámra is. A Fabry–Pérot karoknak lényegében az a szerepe, hogy a fény több időt töltsön a karokban, és ezzel a kapott jelet felerősítse. A detektorok működésének részletes leírása megtalálható [4]-ben.



2. ábra. Egy lézerinterferometrikus gravitációshullám-detektor sematikus rajza. A lézerből kiinduló fénysugár a nyalábosztón kettéoszlik, majd a két Fabry–Pérot karban többször oda-vissza pattog mielőtt újra visszatérve a nyalábosztóra egyesülne a két nyaláb.

Jelenleg két LIGO detektor üzemel, mindkettő az Amerikai Egyesült Államokban (lásd 3. ábra). Az egyik a Washington állambeli Hanfordban, a másik pedig a Luisiana állambeli Livingstonban található. Ezek a berendezések 4 km hosszú karokkal működnek, hiszen a gravitációs hullámok relatív megnyúlást okoznak, így minél nagyobb a detektor, annál nagyobb lesz a ténylegesen mérendő hosszváltozás.

A LIGO detektorokon kívül még egy jelenleg is működő detektor van, a németországi GEO 600, amely azonban csak 600 m-es karokkal rendelkezik. Várhatóan 2016 végén vagy 2017 elején elkészül az olaszországi Virgo detektor is, amely 3 kilométeres karokkal fog üzemelni. Mivel ennek érzékenysége már összemérhető a LIGO



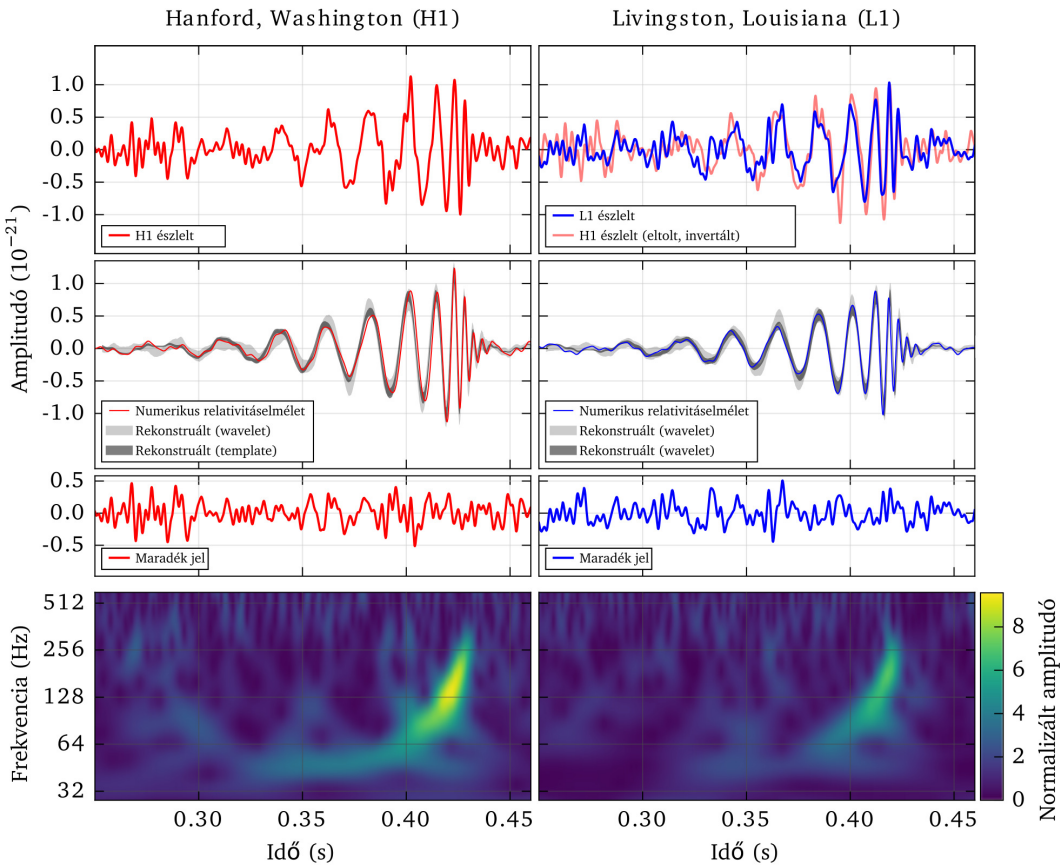
3. ábra. A két LIGO detektor felülnézeti látképe. Bal oldalon a Livingstonban (Louisiana állam), jobb oldalon pedig a Hanfordban (Washington állam) található detektor látható. Forrás: www.ligo.caltech.edu

detektorokéval ezért várhatóan az adatgyűjtési időszakok össze lesznek hangolva és a megfigyeléseket közösen elemzi majd a két kollaboráció. Építés alatt van a japán detektor is, a KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector). Emellett zajlik az Indiában építendő LIGO detektor tervezése is.

Magyar idő szerint 2015. szeptember 14-én 11 óra 50 perc 45 másodperckor a két LIGO detektor 7 ms időkülönbséggel egy tranziens jelet észlelt [5]. A jel nagy amplitúdójából már pár perccel, órával az észlelés után lehetett sejteni, hogy nem csak egy tranziens zajjelenségről van szó, hanem egy gravitációs hullámról. Később a további vizsgálatok azt találták, hogy a gravitációs hullám észlelés szignifikancia szintje nagyobb mint $5,1\sigma$, ami azt jelenti, hogy kevesebb mint 1 a 5,5 millióhoz az esélye, hogy a jel csak egy kiugró zajesemény volt. A gravitációs hullám forrása egy összeolvadó feketelyuk-kettős volt.

A 4. ábra az [5]-ben megjelent ábra magyarított változata. Ennek legfelső paneljén a két detektor által észlelt jel látható. Alatta satírozás jelzi a különböző módszerekkel rekonstruált jelalakot, illetve a numerikus relativitáselmélet segítségével számoltat. Jól látszik, hogy a mért hullámforma jól illeszkedik az elméletileg számoltra. A harmadik sorban a mért és elméletileg számolt jel különbsége látható. Ez azt szemlélteti, hogy

az elméleti jel kivonása után csak zaj marad az adatban. A legalsó két panelen az észlelt jel spektrogramja látható, amin jól kivehető a feketelyuk-kettősökre jellemző időben növekvő frekvencia és amplitúdó.



4. ábra. A GW150914 gravitációshullám-jel. A két oszlop a két detektorban megfigyelt jelet mutatja. A legfelső panelen az észlelt amplitúdó látható az idő függvényében. A második sorban az ez alapján rekonstruált hullámforma van feltüntetve két különböző módszerrel, illetve ezek összehasonlítása a numerikus relativitáselméletből származó elméleti görbével. Jól látható, hogy ezek hibahatáron belül megegyeznek. Felülről a harmadik panel a maradék jelet mutatja, amit a tényleges jelből az elméletit kivonva kapjuk. A legalsó panelen az észlelt jel spektrogramja látható. Az ábra eredetijének forrása: [5]

A rekonstruált hullámforma alapján meg lehetett határozni a fekete lyukak tömegeit is, amire 36^{+5}_{-4} $M_\odot$ és 29^{+4}_{-4} $M_\odot$ adódott[2]. Azt is meg lehetett határozni, hogy az összeolvadás után létrejött fekete lyuk tömege 62^{+4}_{-4} $M_\odot$ volt és ezalatt a rendszer $3,0^{+0,5}_{-0,5}$ $M_\odot$-nek megfelelő energiát kisugárzott.

[2] $M_\odot$ a naptömeget jelöli.

A felfedezés több szempontból is igen nagy jelentőségű. Egyrészt, ez az általános relativitáselmélet első bizonyítéka erős gravitációs térben. Másrészt, ez a megfigyelés közvetlen bizonyíték a fekete lyukak létezésére és arra, hogy ezek az Univerzum koránál rövidebb idő alatt képesek bespirálozni és összeütközni. Harmadrészt, ez az emberiség által valaha megfigyelt legnagyobb sugárzási teljesítményű jelenség, hiszen kevesebb mint egy másodperc alatt három naptömegnek megfelelő energia sugárzódott ki. Legfontosabb jelentősége azonban az, hogy bizonyította a gravitációs hullámok észlelhetőségét, amivel az asztrofizikusok egy új, az elektromágneses spektrumtól teljesen független eszközt kapnak a Világegyetem megfigyelésére.

2. Módszerek

Ebben a fejezetben a munkám során használt módszereket tárgyalom. Először röviden ismertetem a Bayes-statisztikát, amely fogalmait a dolgozat során használni fogom, majd bemutatom a vizsgált paraméterbecslő algoritmust, a paraméterbecslés vizsgálatának alapmódszerét, majd az ehhez használt szimulált zajt és szimulált jeleket.

2.1. Bayes-statisztika

A paraméterbecslés problémáját a Bayes-statisztika keretein belül tárgyaljuk, ezért ebben a részben röviden áttekintjük a Bayes-statisztika alapjait olyan szinten ami a paraméterbecslés megértéséhez elengedhetetlen. A terület részletes leírása és összehasonlítása a klasszikus statisztikával megtalálható a [6] hivatkozásban.

A Bayes-statisztika alapja a Bayes-tétel, amely egy feltételes valószínűség és fordítottja között teremt kapcsolatot:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \tag{20}$$

ahol $P(A|B)$ az A esemény bekövetkezésének valószínűsége, amennyiben B esemény bekövetkezett; $P(B|A)$ a B esemény bekövetkezésének valószínűsége, amennyiben B esemény bekövetkezett, $P(A)$ és $P(B)$ pedig rendre A és B események bekövetkezésének valószínűségei.

Érdemes megjegyezni, hogy a Bayes-tétel a klasszikus statisztikában is ismert, azonban ott jelentősége kisebb, mint a Bayes-statisztikában. A klasszikus statisztikában a valószínűségeket az alábbi módon vezetjük be. Végezzünk el egy kísérletet N-szer egymás után és figyeljük meg egy adott esemény hányszor következik be, ezt jelöljük n-el. A $k = n/N$ arányt relatív gyakoriságnak nevezzük. Ez a relatív gyakoriság újabb kísérleteket elvégezve ingadozni fog, azonban ha a kísérletek számával tartunk a végtelenhez, akkor a relatív gyakoriságok egy adott számhoz fognak tartani, amelyet az esemény valószínűségének nevezünk.

Ezzel szemben a Bayes-statisztikában a valószínűség az adott esemény bekövetkezésébe vetett hitünket jellemzi [6]. Mivel így a valószínűség értelmezéséhez nincsen szükségünk relatív gyakoriságokra, ezért van értelme hipotézisek valószínűségéről beszélni. Így a Bayes-tétel összeköti egy hipotézisbe vetett hitünket egy adott in-

formáció (például megfigyelési adat) megszerzése előtt és után. Ha például a H hipotézisbe vetett hitünket vizsgáljuk, miközben egy megfigyelésből D adat birtokába jutunk, akkor

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}, \tag{21}$$

ahol:

- $P(H)$ a megfigyelés előtti avagy az *a priori* valószínűség,
- $P(H|D)$ a megfigyelés utáni avagy az *a posteriori* valószínűség,
- $P(D|H)$ pedig a megfigyelés hatása avagy a *likelihood* függvény.

Egy statisztikai kérdésben általában az a posteriori valószínűségekre, illetve folytonos esetben ezek eloszlására, vagyunk kíváncsiak. Így a megoldás lényege az, hogy válasszunk egy a priori eloszlást, határozzuk meg a likelihood függvényt. Ezek és a megfigyelések ismeretében a Bayes-tétel megadja az a posteriori eloszlást.

2.2. A BayesWave algoritmus

A gravitációs hullámok jellemzően a detektorok zajában nehezen észrevehetőek, ezért azok kinyerésére különböző keresőalgoritmusokat kell kifejleszteni. Ezek közül a keresőalgoritmusok közül némelyik paraméterbecslést is végez, azonban legtöbbjük egy gravitációs hullámnak vélt jelet továbbad egy paraméterbecslésre kifejlesztett algoritmusnak. Mint ebből látható, a keresőalgoritmusok és paraméterbecslő algoritmusok között nincs éles határ.

A BayesWave [7] egy gravitációshullám-kitörésekre specializált keresőalgoritmus, amely paraméterbecslést is végez. A gravitációshullám-kitörések olyan tranziens gravitációshullám-jelek, amelyek jelalakja nem, vagy csak részben ismert. Gravitációshullám-kitörések forrásai lehetnek a szupernóva-robbanások, neutroncsillag-rengések, elnyúlt pályájú feketelyuk-kettősök, vagy bármilyen ma még ismeretlen tranziens jelet adó forrás.

A BayesWave algoritmusnak három alapvető feladata van. Az első, hogy kiszűrje az ún. glitch-eket. Ezek olyan tranziens zajjelenségek, amelyek könnyen összetéveszthetőek egy gravitációshullám-kitöréssel. A második feladata az algoritmusnak a hullámforma rekonstrukció, vagyis a jelet felépítő bázisfüggvényeket leíró paraméterek meghatározása, és ezáltal a gravitációshullám-jel alakjának előállítása.

Végül az algoritmus égi irányt is becsül. Ez az ún. többcsatornás csillagászat szempontjából jelentős, azaz amikor egy gravitációs hullám forrását elektromágneses műszerekkel is meg szeretnénk figyelni. Ekkor ugyanis fontos, hogy minél pontosabban meg tudjuk mondani a gravitációs hullám forrásának irányát, segítve ezzel a csillagászok munkáját az esetleges elektromágneses kísérőfény megtalálásában.

A BayesWave algoritmus gravitációs hullámok detektálására is képes [8], azonban nagy számításigénye miatt csak egy maximum néhány másodperces adatsort lehet vele egyszerre vizsgálni. Ezért egy másik algoritmussal, az úgynevezett coherent Wave Burst-tel [9] együtt használják ilyen célra, ami kis szignifikanciával, de gyorsan megtalálja hosszú adatsorban is a gravitációs hullám jelölteket. Ezeket a jelölteket vizsgálja meg aztán alaposabban a BayesWave algoritmus.

A BayesWave a mért s adatot úgy modellezi, mint a h gravitációshullám-jel, az n_G stacionárius Gauss-eloszlású zaj, és a g glitch-ek lineárkombinációját.

$$s = \hat{R}h + g + n_G, \tag{22}$$

ahol $\hat{R}$ az időkésleltető operátor, ami adott detektorra megfelelő idővel eltolja a beérkező jelet. Erre azért van szükség, mert a gravitációs hullámok véges terjedési sebessége miatt a gravitációshullám-forrás irányától függően a detektorokba különböző időpillanatban érkezik meg a tranziens jel.

A jel és a glitch-ek leírására a BayesWave az úgynevezett Morlet-Gábor folytonos wavelet reprezentációt használja.

A Morlet-Gábor waveletek idő reprezentációban:

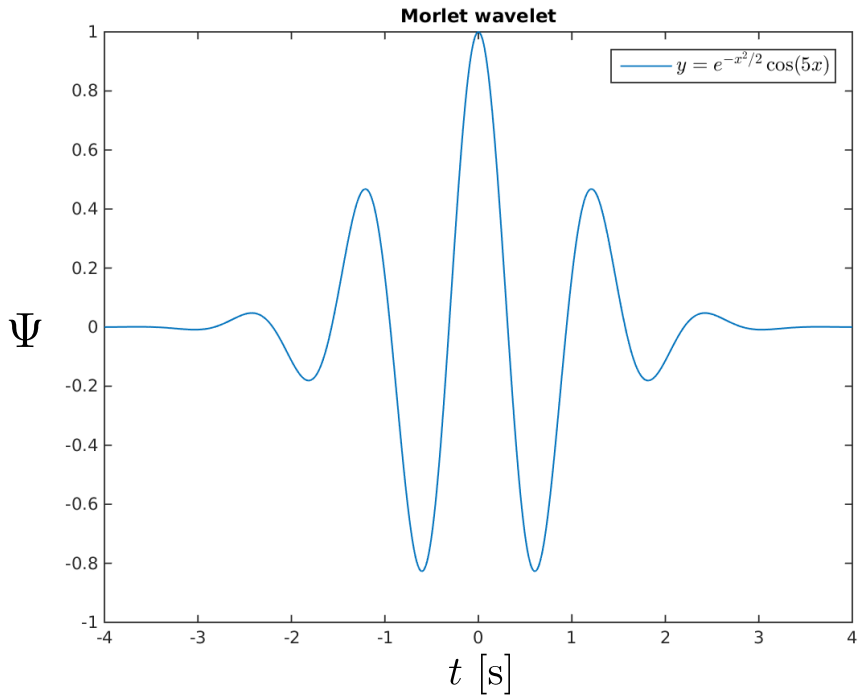
$$\Psi(t; A, f_0, \tau, t_0, \phi_0) = Ae^{-(t-t_0)^2/\tau^2} \cos(2\pi f_0(t - t_0) + \phi_0), \tag{23}$$

ahol A az amplitúdó, t_0 a centrális idő, τ a jel időbeli hosszát jellemző paraméter, f_0 a centrális frekvencia, és ϕ_0 a fázistolás. Egy ilyen wavelet látható az 5. ábrán.

A fenti waveletekből a hullámforma + polarizációja azok összegeként áll elő az alábbi módon:

$$h_+(f) = \sum_{j=0}^{N_s} \Psi(f; A_j, f_{0j}, \tau_j, t_{0j}, \phi_{0j}), \tag{24}$$

ahol N_s a jel rekonstrukciójához használt wavelet-ek száma. Az $\times$ polarizációt azzal a feltevéssel kapjuk, hogy a gravitációs hullám elliptikusan polarizált (ez jellemzően jó közelítéssel igaz lesz):



5. ábra. Morlet-Gábor wavelet $A = 1, t_0 = 0$ s, $\tau = \sqrt{2}$ s, $f_0 = 5/(2\pi)$ Hz, $\phi_0 = 0$ paraméterekkel.

$$h_\times = \epsilon h_+ e^{i\pi/2}, \tag{25}$$

ahol ϵ az ellipticitási paraméter, ha $\epsilon = 1$ akkor cirkulárisan polarizált a jel, ha $\epsilon = 0$ akkor pedig lineárisan polarizált jelről beszélhetünk.

A BayesWave algoritmus a transzdimenziós RJMCMC algoritmust használja a lehetséges modellek és modellparaméterek feltérképezésére, és ezáltal az *a posteriori* eloszlások meghatározására. Ez az algoritmus lényegében egy Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algoritmus, amely azonban azt is tudja kezelni, ha az egyes lépésekben a modell dimenziója megváltozik. Az algoritmusról szemléletes bevezető található a [10] hivatkozásban.

Az RJMCMC tehát nem csak adott számú wavelet-tel találja meg azok legvalószínűbb paramétereit, hanem azt is meghatározza, hogy hány wavelet-tel lehet legjobban leírni a jelet. Sőt, az RJMCMC algoritmus azon eseteket is egyszerre vizsgálja, amikor glitch és gravitációs hullám, csak glitch, csak gravitációs hullám, vagy csak Gauss-eloszlású zaj van az adatsorban.

Ilyen módon azt, hogy mi a favorizált modell (csak glitch, csak gravitációs hullám,

stb.) abból kapjuk meg, hogy az RJMCMC hány lépésig volt az egyes modellekben. Ez alapján például megadható, hogy mennyivel tartjuk valószínűbbnek, hogy gravitációs hullám van a jelben, mint azt, hogy glitch. Ezt az arányt nevezzük Bayes-faktornak, és ez a BayesWave algoritmus detektálási statisztikája, tehát az a mérőszám aminek bizonyos határ feletti értéke esetén azt mondjuk, hogy detektáltunk egy gravitációs hullámot.

Mivel a BayesWave nem modellezett források keresésére van kitalálva, ezért a forrást leíró fizikai paramétereket közvetlenül nem kapjuk meg a paraméterbecslésből, csak a wavelet-paraméterek a posteriori eloszlását. Emellett az algoritmus megadja az a posteriori eloszlásokat a $h(t)$ jelre, a $g(t)$ glitchekre, és a forrás égi irányára és polarizációjára.

2.3. Gravitációs hullámok paraméterbecslése

A gravitációs hullámok felfedezését követően lehetőség nyílik asztrofizikai kérdések megválaszolására gravitációs hullámok észlelése útján. Ehhez elsősorban arra van szükség, hogy a gravitációs hullám hullámformáját rekonstruáljuk a detektor kimenetéből, és hogy megbecsüljük annak különböző paramétereit. Olyan jeleknél, ahol rendelkezésre állnak pontos hullámformamodellek (például körkörös pályán mozgó, elhanyagolható spinnel rendelkező feketelyuk-kettős), ott ez megtehető az észlelt jel modellekkel történő összehasonlításával. Ebben az esetben olyan asztrofizikai paraméterek becsülhetőek meg, mint a kettős komponenseinek tömege, vagy azok spinje. Abban az esetben azonban, amikor nem áll rendelkezésre ilyen asztrofizikai modell, akkor ez a módszer nem alkalmazható. Ekkor bázisfüggvényeket alkalmazhatunk a hullámforma rekonstruálására és a hullámforma modellfüggetlen paramétereit becsülhetjük meg, mint például a középfrekvenciát, középidőt, sávszélességet és időtartamot. Ezen belső paramétereken túl mindkét esetben megbecsülhetjük a jel külső paramétereit, mint például az égi pozíciót vagy a polarizációt.

Dolgozatomban azt vizsgálom, hogy a fentebb ismertetett BayesWave algoritmus mennyire pontosan tudja rekonstruálni egy gravitációshullám-kitörés hullámformáját, illetve mennyire pontosan tudja annak különböző paramétereit megbecsülni. A paraméterbecslés pontosságának ismeretében meg tudjuk határozni asztrofizikai modellek azon legbővebb körét, amelyeket tesztelni tudunk gravitációs hullám megfigyelések útján. Emellett a gravitációshullám-észlelések során végzett paraméterbecslés

jobb értelmezhetőségét is segítik ilyen szimulált jeleken végzett kutatások, mivel itt az algoritmus által adott eredményeket össze tudjuk hasonlítani a bemenetként adott jellel.

2.4. Paraméterbecslés vizsgálata beinjektált jelekkel

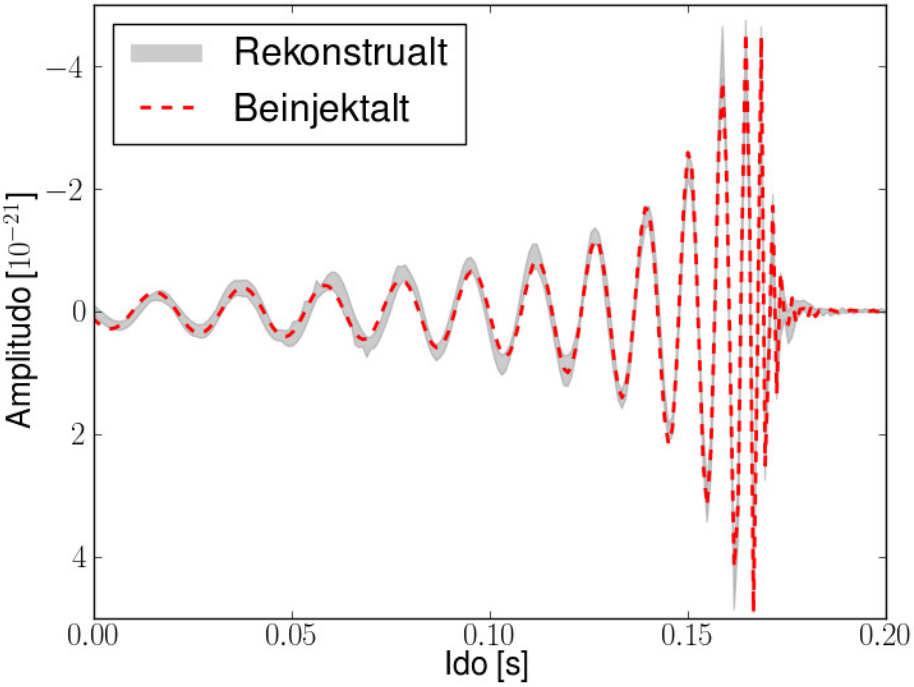
A paraméterbecslés vizsgálatának módszere az alábbi. Szimuláljuk le a LIGO detektorok zaját, ezekhez adjuk hozzá a vizsgálat tárgyát képző szimulált gravitációshullám-jelet olyan módon mintha a jel egy tényleges asztrofizikai forrásból érkezett volna. Tehát a jel a forrás égi pozíciójának és polarizációjának megfelelően különböző módon jelenjen meg az egyes detektorok adatsorában. Így tehát rendelkezésre állnak olyan adatsorok, mint amilyeneket a LIGO detektorok ténylegesen mérnek, azonban pontosan tudjuk, hogy mikor milyen jeleket adtunk a zajhoz. Az ilyen módon a zajhoz adott szimulált jeleket beinjektált jeleknek nevezzük. Ezt az adatsort adjuk át a vizsgálandó paraméterbecslő algoritmusnak, és a továbbiakban különböző módszerekkel vizsgáljuk, hogy mennyire pontosan tudta a különböző jeleket rekonstruálni.

A 6. ábrán a hullámforma rekonstrukciójára láthatunk egy példát. A piros szaggatott vonal jelzi a beinjektált feketelyuk-kettős jelet, míg a szürke sáv a BayesWave algoritmus által rekonstruált jelet mutatja annak hibájával. Láthatjuk, hogy ebben az esetben az algoritmus igen pontosan rekonstruálta a beinjektált jelet. A 3. fejezetben kvalitatíven is megvizsgálom ezt a rekonstrukciós pontosságot, itt most csak a beinjektálás módszerének azon előnyét szeretném szemléltetni, miszerint az algoritmus által becsült tulajdonságok egy az egyben összehasonlíthatóak a jól ismert beinjektált jel tulajdonságaival.

2.5. Szimulált zajminták és jelek

Ebben a részben azt tárgyalom, hogy az előző részben bemutatott módszerhez milyen szimulált zajt és jeleket használtam. Mivel ezek az adatok már korábban megjelentek [11]-ben, ahol részletes információ található ezekről, így én itt csak a legfontosabb tulajdonságokat emelem ki, amelyek mindenképpen szükségesek munkám megértéséhez.

A használt zajminták stacionárius Gaussi zajból állnak. Ezek a LIGO detektorok 2015. szeptember és 2016. január között végzett első észlelési időszak (O1) alatti



6. ábra. Egy szimulált feketelyuk-kettős jelének rekonstrukciója a BayesWave algoritmussal. Szürke sáv jelzi a rekonstruált hullámformát, piros szaggatott vonal pedig a beinjektált hullámformát. A jel-zaj arány a H1 detektorban 41,9, az L1 detektorban pedig 45,3 volt.

érzékenységét tükrözik, de mivel a zajminták még az O1 előtt készültek, így lehetnek kisebb eltérések a ténylegesen elért érzékenységtől. Azért használtam mégis ezt, mivel [11]-ben más algoritmusokra már elvégeztek bizonyos teszteket, így ezeket én is elvégeztem a BayesWave algoritmusra, ami lehetőséget ad a különböző algoritmusok összehasonlítására, ehhez azonban nyilvánvalóan az kell, hogy a zaj és a beinjektált jelek azonosak legyenek a két esetben.

A zajminták tehát jól tükrözik a LIGO-ban az O1 alatt tapasztalt Gaussi zajt. A valós zajban azonban mindig vannak nem-Gaussi tranziens zajjelenségek, ú.n. glitch-ek. Ezek a gravitációshullám-kitörések detektálását nagyban megnehezítik, hiszen ha véletlenül a két detektorban egy időben történik két ilyen glitch azt könnyen hihetjük gravitációs hullámnak. Azonban, ha már bebizonyosodott, hogy a talált jel egy gravitációs hullám, és célunk ennek tulajdonságainak a becslése, akkor már nem számít, hogy vannak vagy nincsenek glitch-ek. Ezért nem jelent problémát, hogy az általam használt zajmintákban nincsenek glitch-ek.

Kutatásom során négy különböző morfológiájú jellel vizsgáltam meg a BayesWave algoritmus működését: Gauss-burkolójú szinusz jelekkel (SG), Gauss-görbékkel (G), fehérzaj kitörésekkel (WNB), és bespirálozó feketelyuk-kettősökkel (BBH). Ezek közül csak a BBH jeleknek van asztrofizikai motivációja, a többi jeltípus azt a célt szolgálja, hogy általánosan, a konkrét jelalaktól független következtetéseket tudjunk levonni. Ezt az általánosság megőrzése érdekében tesszük, mivel gravitációshullám-kitöréseket várunk nem csak gyengén modellezett forrásokból, de olyanokból is amiket ma még nem is ismerünk.

Gauss-burkolójú szinusz jeleket gyakran használnak kitörések modellezésére, egyrészt mivel ez az egyik legegyszerűbb idő és frekvenciatérben is lokalizált jel amit ki lehet találni, másrészt mivel ezek bázist alkotnak az időben és frekvenciában lokalizált jelek terében, így ha egy ilyen jel rekonstrukcióját vizsgáljuk azzal elvileg tudunk valamit mondani egy teljesen általános jel rekonstrukciójára is. A SG jeleket az alábbi képlettel definiáljuk:

$$h(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0(t - t_0) + \phi_0) \cdot e^{\frac{-(t-t_0)^2}{\tau^2}}, \tag{26}$$

ahol A a jel amplitudója, f_0 a centrális frekvenciája, t_0 a centrális ideje, τ a jel időbeli szélessége (időtartama), ϕ_0 pedig egy fázisszög, amely megmondja, hogy a szinusz függvény milyen fázisban van amikor a Gauss-burkoló maximális.

Ezen kívül Gauss-görbéket is vizsgálunk, ami igazából a SG jelek határesetének tekinthető, amikor $f_0 \to 0$. Azonban ezzel lényegesen megváltoznak a tulajdonságai, mivel a frekvenciatérben egy nullára centrált Gauss-görbe lesz, tehát a jel energiájának nagy része nagyon kis frekvenciákon lesz jelen, ahol azonban a LIGO nem érzékeny, így jellemzően ennek a frekvenciatérbeli Gauss-görbének a nagy frekvenciás részét érzékeljük csak. A G jelek alakja tehát az alábbi:

$$h(t) = A \cdot e^{\frac{-(t-t_0)^2}{\tau^2}}, \tag{27}$$

ahol a paraméterek a SG jelekkel megegyezőek.

A fehérzaj kitörések olyan időben lokalizált jelek, amelyek a frekvenciatérben egy $f_{\min}$ és $f_{\max}$ közötti téglalapként jelennek meg. Ezeket az alábbi összefüggés

definiálja:

$$h = A \cdot e^{\frac{-(t-t_0)^2}{\tau^2}} \cdot \int e^{-2\pi i f t}[\Theta(f - f_{\min}) - \Theta(f - f_{\max})]\mathrm{df}, \tag{28}$$

ahol Θ a Heaviside-függvény. A jelek előállításánál $f_{\min}$ és $f_{\max}$ között nem ténylegesen sík spektrumot vettünk, hanem azt egy Gaussi fehérzajból mintavételeztük, így ez a morfológia egy adott frekvenciatartományon belüli véletlenszerű eloszlású energia kisugárzást hivatott modellezni.

A BBH morfológia az egyetlen amely ténylegesen egy konkrét asztrofizikai forrást modellez. Ezek paraméterbecslésére igaz léteznek célzott algoritmusok, mégis érdekes megvizsgálni a BayesWave teljesítményét is ezeken, hiszen jelenleg még csak feketelyuk-kettőst sikerült a LIGO-nak detektálnia, és ez a későbbiekben is egy fontos és gyakran észlelhető forrás lesz. A használt BBH jelek előállításának technikai részletei megtalálhatóak [11]-ben és annak hivatkozásaiban. Itt most annyit érdemes tudnunk, hogy ezek a jelek tartalmazzák egy feketelyuk-kettős fejlődésének mindhárom stádiumát (bespirálozás, összeolvadás, lecsengés) és a fekete lyukak spinjei is szimulálva vannak, igaz csak a pálya impulzusmomentummal azonos irányba állhatnak. Így a hullámformát négy szabad paraméter írja le, a fekete lyukak tömegei (M_1, M_2) és azok spinje (S_1, S_2). Utóbbi 0 és 1 közötti értékeket vehet fel.

Az 1. táblázatban összefoglaltam a négy morfológiánál a véletlenszerűen generált paraméterek határait. Ezen határok között egyenletes eloszlásból generáltuk a véletlen paramétereket. Ezeken túl a SG és G jeleknél még az ϵ ellipticitási paramétert is véletlenszerűen generáltam, ami megadja, hogy milyen arányban áll a h_+ és a $h_\times$ polarizáció.

Mindegyik morfológiából nagyjából százezret injektáltunk be véletlenszerűen választott paraméterekkel. A fent tárgyalt paramétereken kívül még az amplitúdókat is véletlenszerűen választottuk olyan módon, hogy az egy egyenletes térbeli eloszlást szimuláljon, azaz kisebb amplitúdójúakból kevesebbet szimuláltunk. Emellett úgy választottuk ezt az eloszlást, hogy a beinjektált jelek nagy részét ne is tudjuk detektálni a túl kis amplitúdójuk miatt. Erre azért volt szükség, mert így figyelembe vesszük azt a szelekciós effektust is amit a detektorok véges érzékenysége visz a folyamatba.

Mivel a BayesWave algoritmus csak a cWB algoritmus által megtalált jeleket analizálja, ezért azt hogy a beinjektált jelekből végül mennyit vizsgáltam meg a

Morfológia	Paraméter	Minimum	Maximum
SG	f_0	40 Hz	1500 Hz
	$Q = \sqrt{2}\pi\tau f_0$	3	30
	ϕ_0	0	2π
G	τ	1 ms	10 ms
WNB	τ	5 ms	100 ms
	$f_0 \approx (f_{\max} + f_{\min})/2$	40 Hz	1500 Hz
	$\sigma_f \approx (f_{\max} - f_{\min})/2$	10 Hz	500 Hz
BBH	M_1	15 $M_\odot$	25 $M_\odot$
	M_2	15 $M_\odot$	25 $M_\odot$
	S_1	0	0,9
	S_2	0	0,9

1. táblázat. A véletlenszerűen generált jelek paraméterhatárai. Forrás: [11]

BayesWave-vel az határozza meg, hogy a cWB mennyi jelet talált meg. Jelen esetben a cWB 256 G, 1112 SG, 769 WNB és 2488 BBH jelet talált meg. A BBH jelekből végül nem analizáltuk mindegyiket, csak 500 véletlenszerűen választottat, hogy csökkentsem a számítási igényeket. Tehát végül 256 G, 1112 SG, 769 WNB és 500 BBH jelet vizsgáltam.

3. Eredmények

A kutatás során három aspektusát vizsgáltuk a BayesWave algoritmus paraméterbecslő képességének: égi pozíció becslés (lásd 3.1. rész), hullámforma rekonstrukció (lásd 3.2. rész), gravitációshullám-jel paramétereinek becslése (lásd 3.3. rész). Alábbiakban ezen területek eredményeit ismertetem.

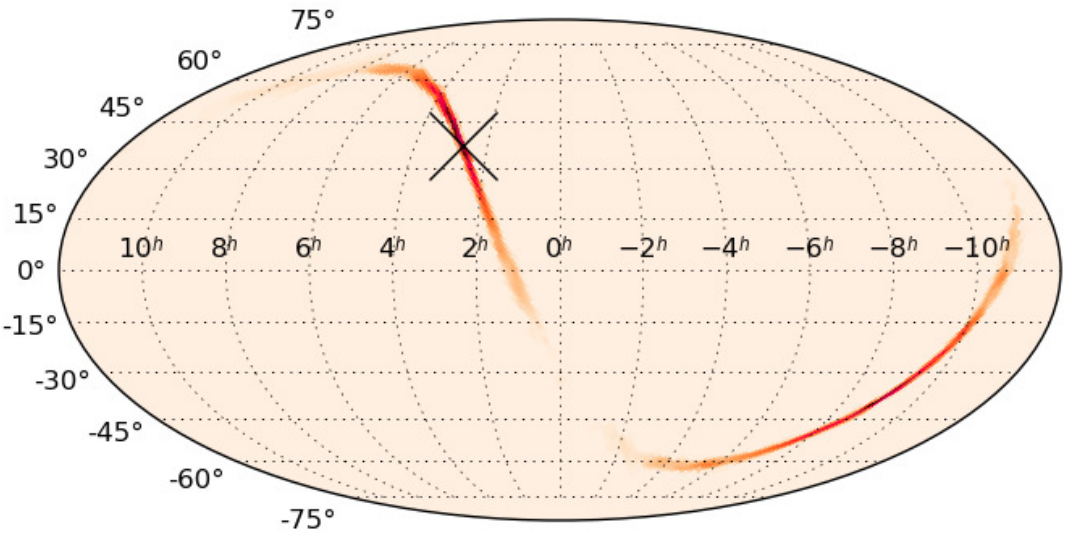
3.1. Égi pozíció rekonstrukció

A LIGO detektorok a hagyományos távcsövekkel ellentétben nem képesek közvetlenül meghatározni a forrás égi pozícióját. Azonban ha több detektor is rendelkezésre áll, akkor a gravitációs hullámok ismert terjedési sebességének köszönhetően a különböző detektorokba érkezés időkülönbségéből mondhatunk valamit a forrás égi pozíciójáról. Két detektor esetén a detektorokat összekötő egyeneshez képesti szöget tudjuk meghatározni, ami az időkülönbségek véges pontossága miatt az égen egy gyűrű alakú tartományt fog kijelölni. Három detektor esetén ezt három különböző detektorpárra elvégezhetjük, így két foltszerű égterületre szűkíthetjük a forrás lehetséges égi pozícióját.

Ezen a háromszögeléses módszeren túl figyelembe vehetjük a detektorok irányérzékenységét is, azaz nagyobb valószínűségeket rendelünk azokhoz az irányokhoz amerre érzékenyebbek a detektorok. Ezzel két detektor esetén a gyűrűt egy vagy két hosszan elnyúlt alakú területre szűkíthetjük, míg egy három detektoros rendszerben a két folt közül ki tudjuk választani a valószínűbbet.

A BayesWave algoritmus egy úgynevezett égtérképet állít elő, ami a második ekvatoriális koordinátarendszer két koordinátájának (rektaszcenzió és deklináció) *a posteriori* eloszlása. Egy ilyen égtérképet mutatok be a 7. ábrán. A színezés tehát a valószínűségi eloszlást mutatja, az ábra bal oldalán a deklináció, vízszintesen pedig a rektaszcenzió értékei olvashatóak le. A beinjektált jel pozícióját $\times$ jelöli. Jól látható, hogy a két detektoros rendszerre jellemzően a rekonstruált égterület két elnyúlt alakú területből áll.

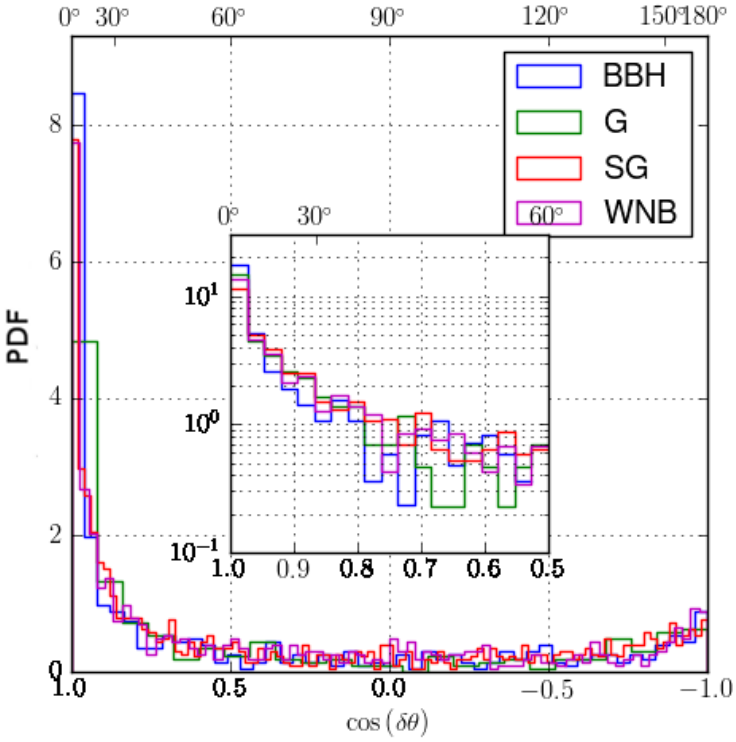
Azt szeretnénk most jellemezni, hogy mennyire jó egy ilyen égtérkép. Erre a célra különböző mérőszámokat vezethetünk be. Talán a legkézenfekvőbb ilyen mérőszám az *a posteriori* eloszlás maximuma és a beinjektált jel tényleges pozíciója közti szögtávolság ($\delta\theta$). Ez a 7. ábrán látható példánkon közel 0°. Az összes beinjektált



7. ábra. Példa egy égtérképre. A színezés az a posteriori eloszlást jelöli, az éggömb beosztása második egyenlítői koordináták szerint történt. A beinjektált pozíciót × jelöli. Ebben az esetben az átfésült terület 42 négyzetfok volt.

jelre kiszámoltuk ezt a mérőszámot és ezek eloszlása látható a 8. ábrán, ahol különböző morfológiájú jeleket különböző szín jelöli. Az ábrát Reed Essick (MIT) készítette az általam készített égtérképek alapján. Jól látható, hogy az eredmény nagyjából megegyezik minden morfológiára, és hogy a kapott eloszlás bimodális. A nagyobb maximum 0°-nál látható, ami az jelenti, hogy leggyakrabban néhány fokon belül jó helyre lokalizálja a forrást a BayesWave. A lényegesen kisebb második maximum éppen 180°-nál látható, ami annak felel meg, hogy két detektor esetén a gyűrű két átellenes pontja között nehezen tudunk választani. Ez jól látszik a 7. ábrán is, ahol a maximum igaz elég közel van a tényleges pozícióhoz, de az ég átellenes pontjához is elég nagy valószínűséget rendelt az algoritmus. Ez annak köszönhető, hogy a hanfordi és livingstoni detektorok irányérzékenysége közel azonos, ami azt eredményezi, hogy a rendszer ellentétes irányokra ugyanannyira érzékeny.

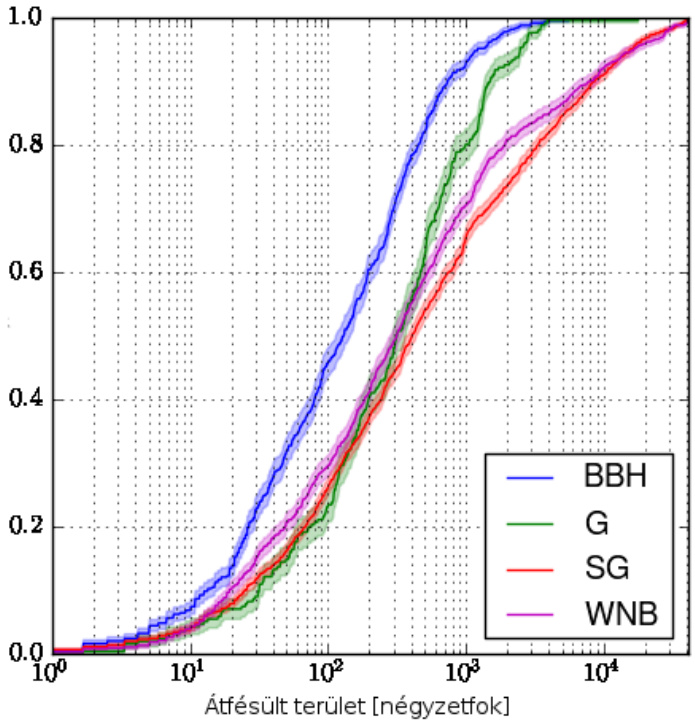
A csillagászok, akik a gravitációshullám-jellel egy időben kibocsájtott elektromágneses sugárzás után kutatnak, jellemzően azt a stratégiát követik, hogy a legnagyobb valószínűségű égterülettől kezdődően az egyre kisebb valószínűségek felé haladva végigpásztázzák az eget. Ezért érdemes definiálni az *átfésült terület* mennyiséget, ami éppen azt mondja meg, hogy mekkora területet kell egy ilyen



8. ábra. A beinjektált jel égi pozíciója és az égtérkép maximumának távolságából ($\delta\theta$) készült hisztogram. Az ábrát Reed Essick (MIT) készítette.

stratégiánál átkutatnia a csillagásznak mire a tényleges pozícióhoz ér. Az erre vonatkozó kumulatív eloszlás a 9. ábrán látható. Az ábrát Reed Essick (MIT) készítette az általam készített égtérképek alapján. Erről tehát azt olvashatjuk le, hogy az események mekkora részénél lesz egy bizonyos értéknél kisebb az átfésült terület. Például leolvashatjuk, hogy 100 négyzetfoknál kisebb volt az átfésült terület a G, SG és WNB jeleknél 20-30%-ban, míg a BBH-knál 45%-ban.

Látható tehát, hogy az esetek többségében az átfésült terület igen nagy, praktikusan a csillagászok által néhány napon belül nem lefedhető észlelésekkel. Ezért fontos, hogy bekapcsolódjon a mérésbe egy harmadik detektor, mivel az lényegesen lecsökkentené ezt a területet, és ezzel megnövelné annak az esélyét, hogy megtaláljuk a gravitációs hullámokkal egy időben kibocsájtott elektromágneses jeleket. A tervek szerint az olaszországi VIRGO detektor 2016-2017 folyamán valamikor be fog kapcsolódni a mérésekbe, és akkor megvalósulna ez a háromdetektoros rendszer.



9. ábra. A beinjektált jelekből készült égtérképek átfésült területének kumulatív eloszlása. Az ábrát Reed Essick (MIT) készítette.

3.2. Hullámforma rekonstrukció

Gravitációshullám-észleléseknél fontos feladat a jel alakjának meghatározása, az ú.n. hullámforma rekonstrukció. Szemben a jól modellezett forrásokkal (pl. körkörös feketelyuk-kettősök), a kitöréseknél ez nem megoldható elméleti hullámformákkal történő összehasonlítás útján, mivel a rendelkezésre álló hullámforma modellek itt vagy nem elég pontosak, vagy túl bonyolultak, sőt lehet, hogy nincsen is semmilyen modellünk.

A BayesWave, mint korábban láttuk, waveletekkel modellezi a jelet, így ezekből megkapjuk a rekonstruált hullámformát. Az előző fejezetben a 6. ábrán láttuk egy ilyen rekonstruált jel kvalitatív összehasonlítását a beinjektált jellel. A célunk most az, hogy valamilyen kvantitatív összehasonlítást adjunk, és bevezessünk valamilyen mérőszámot, ami a hullámforma rekonstrukció jóságát jellemzi. Én erre az *egybeesés*

(angolul: *overlap*) mennyiséget használom, amit az alábbi képlet definiál:

$$\mathcal{O} = \frac{(h_\mathrm{i}|h_\mathrm{r})}{\sqrt{(h_\mathrm{i}|h_\mathrm{i})(h_\mathrm{r}|h_\mathrm{r})}}, \tag{29}$$

ahol h_i a beinjektált, h_r pedig a rekonstruált hullámforma, $(.|.)$ pedig a függvények közötti, zajjal súlyozott skalárszorzás, amit az alábbi képlet definiál:

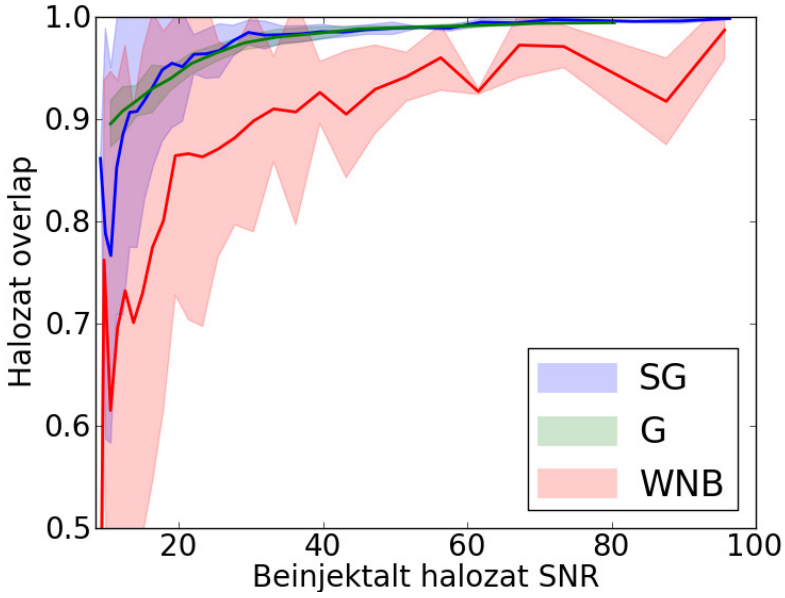
$$(a|b) = 2 \cdot \int \frac{a(f)b^*(f) + a^*(f)b(f)}{S_\mathrm{n}(f)} \mathrm{df}, \tag{30}$$

ahol S_n a zajspektrum. A (29) egyenletből láthatóan $\mathcal{O} \in [-1, 1]$, és a rekonstruált jel annál jobban hasonlít a beinjektált jelre, minél nagyobb ez a szám.

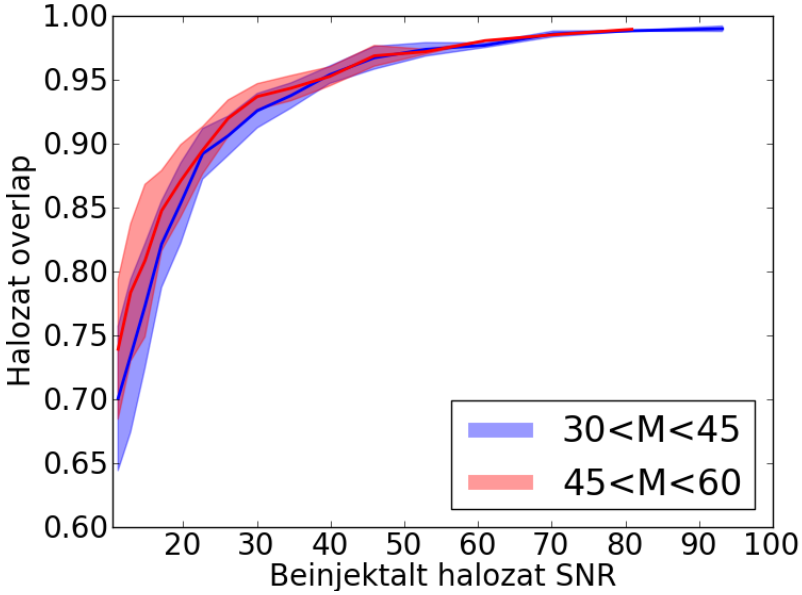
Ezt az egybeesést kiszámolhatjuk az egyes detektorokban észlelt jelre, vagy az egész detektorhálózatra is olyan módon, hogy a (29) egyenletben az egyes skalárszorzatokat a két detektorban beinjektált és rekonstruált hullámformák skalárszorzatának összegével helyettesítjük. A 6. ábrán látható jelre például $\mathcal{O}_\mathrm{halozat} = 0,985$. A 10. és 11. ábrákon a különböző hullámformák esetére láthatjuk az egybeesést a hálózat jel-zaj arányának (SNR) függvényében. Jól látható, hogy az egybeesés a várakozásnak megfelelően a jel-zaj arány növekedésével drasztikusan növekszik minden morfológiára és egy bizonyos SNR felett 1-hez nagyon közeli értékeket kapunk.

Érdemes megfigyelni a 10. ábrán, hogy a SG és G jelek hasonlóan viselkednek, azonban a WNB jelekre lényegesen kisebb egybeesés értékeket kaptam. Ez valószínűleg annak tulajdonítható, hogy a BayesWave elliptikus polarizáltságot feltételez, ami azonban a WNB jeleknél nem áll fenn. A BBH jelek esetében külön ábrázoltam a 45 $M_\odot$-nél kisebb és nagyobb össztömegű rendszereket. Ebből az látható, hogy bár közel azonosak az egybeesés értékek, de valamivel a nagy tömegű kettősökre pontosabb volt a hullámforma rekonstrukció.

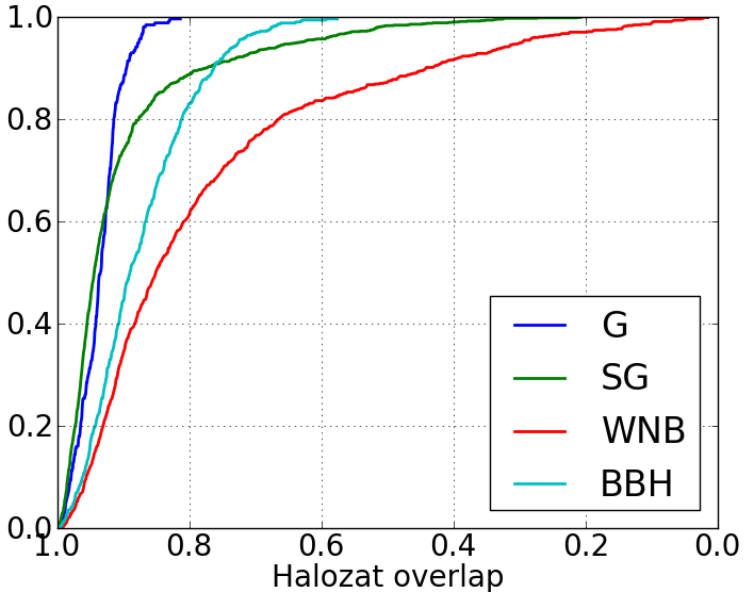
A 12. ábrán az egybeesés értékek kumulatív hisztogramját láthatjuk a különböző morfológiákra. Jól látható, hogy a BayesWave a G és SG morfológiáknál érte el a legnagyobb $\mathcal{O}$ értékeket, ami érthető, mivel az algoritmus szinusz-Gaussi jeleket használ a rekonstrukcióra. Emellett itt is láthatjuk, hogy a WNB jeleknél nagyon sok esetben igen alacsony egybeesést kaptunk, számszerűen az esetek 40%-ban $\mathcal{O} < 0,8$.



10. ábra. A hálózati egybeesés a beinjektált jelek hálózati jel-zaj arányának függvényében a SG, G és WNB jelekre. A hibahatárok az egybeesés értékek szórását mutatják.



11. ábra. A hálózati egybeesés a beinjektált jelek hálózati jel-zaj arányának függvényében a BBH jelekre. Kék színnel a 45 $M_\odot$-nél kisebb, pirossal az ennél nagyobb össztömegű rendszerekre vonatkozó összefüggést ábrázoltam. A hibahatárok az egybeesés értékek szórását mutatják.



12. ábra. A hálózati egybeesés kumulatív eloszlása mind a négy morfológiájú jeltípusra.

3.3. A gravitációshullám-jel paramétereinek becslése

Érdemes a gravitációshullám-jelek egyes egyszerű paramétereinek becslését is vizsgálni. Ezek a centrális idő (t_0) és frekvencia (f_0), a sávszélesség (Δf) és az időtartam (Δt), amiket az alábbi képletek definiálnak:

$$t_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \rho_{\mathrm{TD}}(t)t, \qquad \Delta t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \rho_{\mathrm{TD}}(t)(t-t_0)^2, \tag{31}$$

$$f_0 \equiv \int_{0}^{\infty} df\ \rho_{\mathrm{FD}}(f)f, \qquad \Delta f \equiv \int_{0}^{\infty} df\ \rho_{\mathrm{FD}}(f)(f-f_0)^2, \tag{32}$$

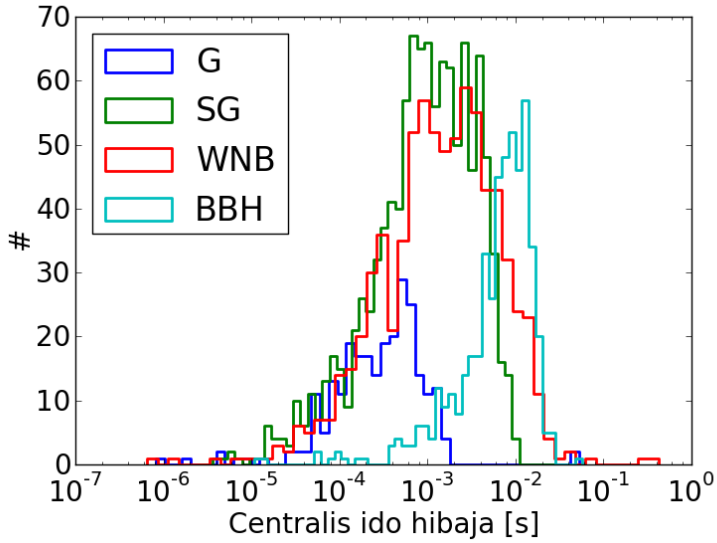
ahol ρ_{FD} a jel normált energiaeloszlása frekvencia térben, ρ_{TD} pedig a jel normált energiaeloszlása idő térben:

$$\rho_{\mathrm{TD}} = \frac{h_+^2(t) + h_\times^2(t)}{h_{rss}^2}, \tag{33}$$

$$\rho_{\mathrm{FD}} = \frac{2(|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2)}{h_{rss}^2}. \tag{34}$$

ahol $h_{rss}^2 = \int(h_\times^2 + h_+^2)\mathrm{dt}$ a négyzetesen összegzett gravitációshullám-amplitúdó, $\tilde{h}_+(f)$ pedig $h_+(t)$ Fourier transzformáltját jelöli.

A 13. ábrán a t_0 becslés abszolút hibájának eloszlását láthatjuk a négy különböző morfológiára. Legpontosabban a G jelek centrális idejét lehetett megbecsülni, a SG és WNB jelek közel azonos pontosságot mutatnak, míg a BBH jeleknél a legpontatlanabb ez a becslés.

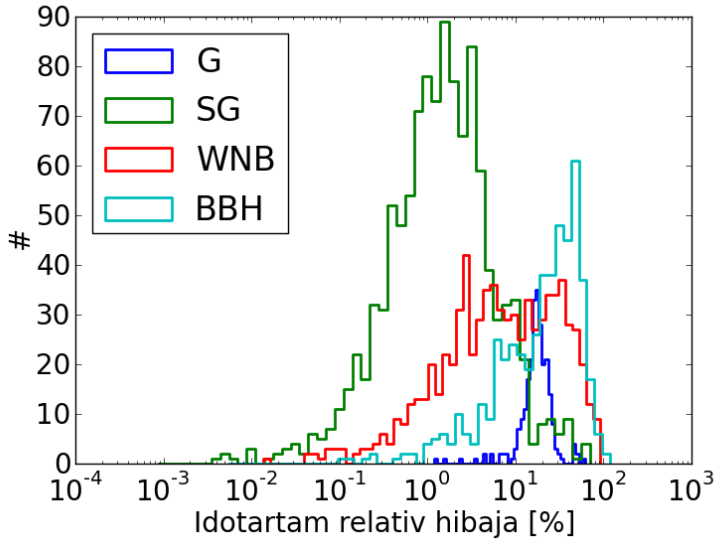


13. ábra. A mért centrális idők (t_0) abszolút hibájának hisztogramja a négy jeltípusra.

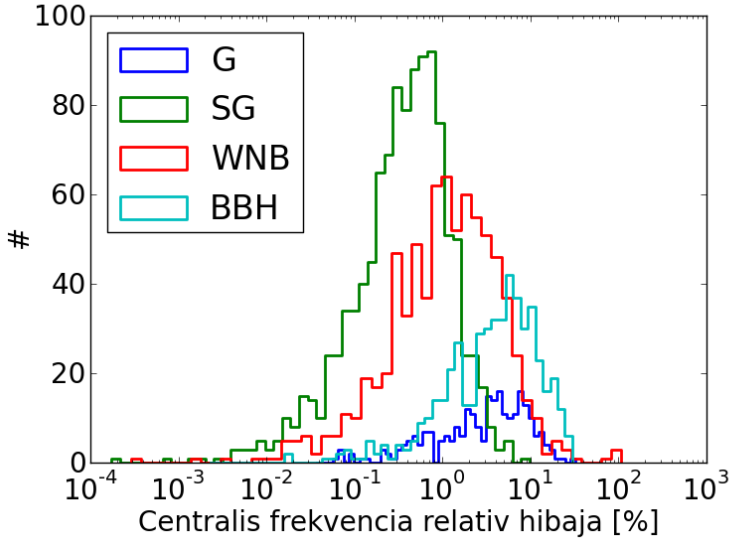
A 14. ábrán a Δt relatív hibájának eloszlását ábrázoltam. Látható, hogy az időtartam becslés a SG jeleket leszámítva viszonylag pontatlan, hiszen 5-10%-nál kisebb hibát nagyon kevés esetben látunk. A SG jelek esetében azonban az eloszlás közepe 1% körül van ami igen pontos Δt becslést jelent.

Az f_0 értékek relatív hibáinak hisztogramja a 15. ábrán, a Δf értékek relatív hibájának eloszlása pedig a 14. ábrán látható. Megfigyelhető, hogy általában Δf pontatlanabbul meghatározható, mint f_0. Ez annak köszönhető, hogy a sávszélesség kiszámítására használt (32) képletben szerepel a már meghatározott f_0 értéke, így ennek hibája hibát okoz Δf-ben is. A korábbiakhoz hasonlóan itt is a SG jelek esetében a legpontosabb a becslés.

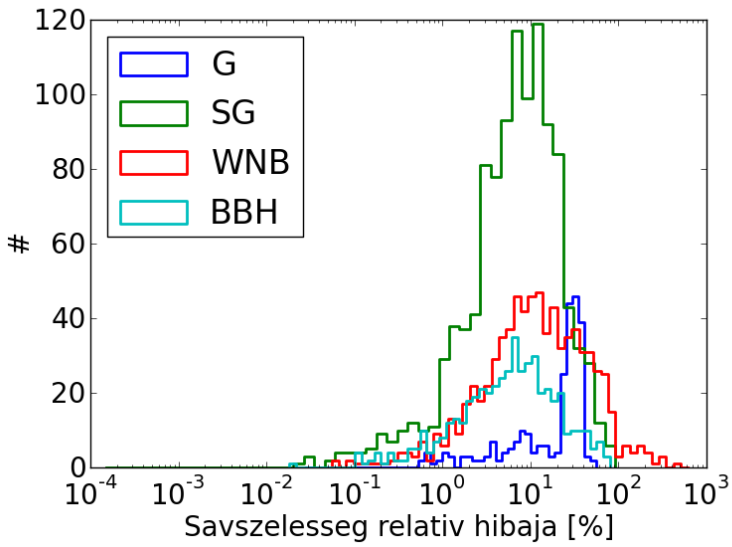
Ezen egyszerű paraméterek megbecslése azért hasznos, mert ezeken keresztül tudhatunk meg valamit a forrásról. Feketelyuk-kettősök esetében például elő lehet állítani egy átváltást az $(f_0; \Delta f)$ értékek és az $(M; q)$ értékek között, ahol M a rendszer össztömege, q pedig a két fekete lyuk tömegaránya (lásd [12] 11. ábráját).



14. ábra. A mért időtartamok (Δt) relatív hibájának hisztogramja a négy jeltípusra.



15. ábra. A mért centrális frekvenciák (f_0) relatív hibájának hisztogramja a négy jeltípusra.



16. ábra. A mért sávszélességek (Δf) relatív hibájának hisztogramja a négy jeltípusra.

4. Konklúzió

Dolgozatomban megvizsgáltam, hogy a LIGO Tudományos Kollaboráció által használt BayesWave algoritmus milyen pontossággal tudja rekonstruálni gravitációshullám-kitörések hullámformáját, illetve, hogy milyen pontosan képes megbecsülni a forrás égi pozícióját és a jel egyszerűbb modellfüggetlen paramétereit.

Munkám, attól függetlenül, hogy egy konkrét algoritmust vizsgáltam, hasznos eredményeket szolgáltat arra vonatkozóan, hogy mennyire pontosan tudunk paraméterbecslést végezni gravitációshullám-kitöréseken. Ez azért fontos, mert ezen információ birtokában lehetőség nyílik azon asztrofizikai modellek beazonosítása, amelyek gravitációshullám-kitörések megfigyelésével történő tesztelésére lehetőség van ezen pontosság mellett.

Emellett kutatásom segítséget nyújthat különböző algoritmusok összehasonlításában, mivel ugyanezen tesztek elvégezhetőek, nem csak a BayesWave-re. Emellett a BayesWave algoritmus fejlesztőivel szoros együttműködést folytatok, így az eredmények nagyban segítik az algoritmus további fejlesztését.

Az itt bemutatott eredményeket is magában foglaló nemzetközi referált folyóiratba szánt publikáció kézirata már előkészületben van. Későbbiekben tervezem annak vizsgálatát, hogy hogyan lehet konkrét gravitációshullám-kitörések forrásainak asztrofizikai paramétereit megbecsülni. Mindezzel szeretnék a felé a cél felé haladni, hogy gravitációs hullámok megfigyelésével asztrofizikai kérdésekre kapjunk válaszokat.

Köszönetnyilvánítás

Mindenek előtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Raffai Péternek, aki a szó szoros értelmében vett témavezetői feladatokon túl rengeteg olyan a konkrét kutatáshoz nem kapcsolódó kérdésben is segített, mint a kutatói szemlélet, a kutatások során nap mint nap felmerülő praktikus kérdések, vagy a hatékony kommunikáció a tudományban.

Szeretnék köszönetet mondani a kutatási projektben részt vevő amerikai kollégáknak, akik társszerzőségével előkészületben van az eredményeket bemutató publikáció, név szerint Neil J. Cornish-nak, Reed Essick-nek, Jonah Kannernek, Erik Katsavounidisnek, Tyson B. Littenbergnek, Salvatore Vitale-nek. Továbbá köszönettel tartozom Meg Millhouse-nak, aki a BayesWave algoritmus használatában nyújtott segítséget.

Szintén köszönet illeti az Eötvös Gravity Research Group tagjait, akik a rendszeres csoportmegbeszéléseken sok hasznos megjegyzéssel segítették a munkámat, név szerint Szölgyén Ákost, Dálya Gergelyt, Galgóczi Gábort, Takátsy Jánost, Beke Sándort, Gondán Lászlót, Raffai Pétert, és a kutatócsoport vezetőjét Frei Zsoltot.

Végül szeretném megköszönni Jakab Villő Enikőnek, aki többször átolvasta a dolgozatot és segített annak nyelvhelyességét javítani, illetve családomnak, hogy egész gyermekkorom alatt mindenben támogattak, és ezzel elősegítették, hogy rátaláljak a tudományos pályára.

Hivatkozások

[1] A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 844-847.*, 1915.

[2] C. M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17, June 2014.

[3] J. D. E. Creighton és W. G. Anderson. *Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis.* Wiley-VCH, 2011.

[4] J. Aasi, B. P. Abbott, R. Abbott, et al. Advanced LIGO. *Classical and Quantum Gravity*, 32(7):074001, April 2015.

[5] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, February 2016.

[6] D. Wickmann. *Bayes-statisztika.* ELTE Eötvös Kiadó Kft., 1999.

[7] N. J. Cornish és T. B. Littenberg. Bayeswave: Bayesian inference for gravitational wave bursts and instrument glitches. *Classical and Quantum Gravity*, 32(13):135012, July 2015.

[8] T. B. Littenberg, J. B. Kanner, N. J. Cornish, és M. Millhouse. Enabling high confidence detections of gravitational-wave bursts. *ArXiv e-prints*, November 2015.

[9] S. Klimenko, I. Yakushin, A. Mercer, és G. Mitselmakher. A coherent method for detection of gravitational wave bursts. *Classical and Quantum Gravity*, 25(11):114029, June 2008.

[10] K. Smith. Reversible-jump markov chain monte carlo multi-object tracking tutorial. Communication IDIAP-COM-06-07, IDIAP Research Institute, 2006.

[11] R. Essick, S. Vitale, E. Katsavounidis, G. Vedovato, és S. Klimenko. Localization of Short Duration Gravitational-wave Transients with the Early Advanced LIGO and Virgo Detectors. *ApJ*, 800:81, February 2015.

[12] The LIGO Scientific Collaboration és the Virgo Collaboration. Observing gravitational-wave transient GW150914 with minimal assumptions. *ArXiv e-prints*, February 2016.

NYILATKOZAT

Név:

ELTE Természettudományi Kar, szak:

NEPTUN azonosító:

Szakdolgozat címe:

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2016. május 30. _____

a hallgató aláírása